ISSN 1330–0016
CODEN FIZBE7

POSSIBILITY OF DYNAMICAL MASS GENERATION IN FINITE QUANTUM ELECTRODYNAMICS
Part 2

ALEXANDR M. EISHINSKII

National Mining University of Ukraine,
Dniepropetrovsk, 320000, Serova 3, apt. 7, Ukraine

Received 21 July 1999 ; Revised manuscript received 24 July 2000
Accepted 19 March 2001

The dynamical mass generation does not take place in the “finite” quantum electrodynamics if $(1 - 3\alpha_0/\pi) \neq 0$.

PACS numbers: 11.15.Tk, 11.30.Rd UDC 530.145

Keywords: “finite” quantum electrodynamics, dynamical mass generation, nonexistence of massive solution

1. *Введение*

В [1] дано качественное решение сформулированной проблемы. В данной заметке рассматривается аналитическое решение. Проблема впервие была сформулирована в рамках конечной электродинамики в работах [2,3].

2. *Постановка задачи*

Уравнение для фермионного пропагатора имеет вид [1]

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) + \frac{e_0^2}{\mathrm{i}(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4q\, \gamma^\mu\, S(q)\Gamma^\nu(p,q,p-q)\, D^0_{\mu\nu}(p-q) \ , \qquad (1)$$

$$S^{-1}(p) = m_0 + \Sigma(p) = \widetilde{p} - A(-p^2) - \widetilde{p}B(-p^2) \ , \qquad (2)$$

$$S_0^{-1}(p) = m_0 - \widetilde{p}, \qquad D^0_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2}\ \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}(1-d_i)\right),$$

где d_i определяет выбранную калибровку и $\widetilde{p} = p_\mu \gamma^\mu$. Как показано в работе [1], массовый оператор Σ удовлетворяет уравнению

$$\Sigma(p^2) = \frac{e_0^2}{\mathrm{i}(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 q \; \frac{\Sigma(q^2)}{(p-q)^2\,(\Sigma^2(q^2)+q^2)} \; . \tag{3}$$

После перехода к евклидовой метрике и интегрирования по угловым переменным получается интегральное уравнение

$$A(x) = g^2 \left\{ \frac{1}{x} \int\limits_0^x \frac{y\,A(y)\,\mathrm{d}y}{A^2(y)+y} + \int\limits_x^\infty \frac{A(y)\,\mathrm{d}y}{A^2(y)+y} \right\}, \tag{4}$$

где $y = -q^2, \quad x = -p^2$, и $g^2 = 3\,e_0/(16\pi^2) = 3\alpha_0/4\pi$.

Как показано в работе [1], при любых предположениях относительно поведения $A(x)$ при $x \to 0$ справедливо соотношение

$$A(0) = g^2 \int\limits_0^\infty \frac{A(y)\,\mathrm{d}y}{A^2(y)+y} \;, \tag{5}$$

которое означает, что $A(0)$ конечно, если интеграл сходится. Интегральное уравнение (4) с использованием (5) может быть переписано в виде [1]

$$A(x) = A(0) + g^2 \int\limits_0^\infty \frac{A(y)}{A^2(y)+y} \left(\frac{y}{x} - 1\right) \mathrm{d}y \,. \tag{6}$$

Авторы работы [1] показали, что при $A(0) = 0, \quad g^2 > 0$, уравнение (6) имеет лишь тривиальное решение. Рассмотрим прежде всего случай $A(0) \neq 0$. Тогда уравнение (6) дает следующее значение производной $\mathrm{d}A^2(x)/\mathrm{d}x$ в нуле [1]:

$$\left. \frac{\mathrm{d}A^2(x)}{\mathrm{d}x} \right| = -g^2, \qquad A(0) \neq 0 \,. \tag{7}$$

Последовательным дифференцированием интегральное уравнение (6) в работе [1] сведено к дифференциальному уравнению

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(xA(x)) = -g^2 \frac{A(x)}{A^2(x)+x} \,, \tag{8}$$

к исследованию которого применимы методы работ [7] и [9]. Уравнение (8) изучалось также в работах [4] и [8].

3. Решение проблемы с помощью теоремы Харди

Уравнение (8) можно записать в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2 A(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{3\alpha_0}{4\pi}\frac{A(x)}{x(A^2(x)+x)} = 0\,. \tag{9}$$

Подстановка

$$A(x) = \sqrt{x}\ A_1(x) \tag{10}$$

преобразует дифференциальное уравнение (9) к виду

$$x^2\,\frac{\mathrm{d}^2 A_1}{\mathrm{d}x^2} + 3x\,\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}x} + \frac{3}{4}A_1 + \frac{3\alpha_0}{4\pi}\,\frac{A_1}{A_1^2+1} = 0\,. \tag{11}$$

Подстановка

$$x = \mathrm{e}^t \qquad (x \to +\infty, t \to \infty) \tag{12}$$

преобразует дифференциальное уравнение (11) к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2 A_1}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t} + \frac{3}{4}A_1 + \frac{3\alpha_0}{4\pi}\frac{A_1}{A_1^2+1} = 0\,. \tag{13}$$

В работе [5] доказано, что $A(x)$ не может стремиться к постоянной $C > 0$ при $x \to +\infty$. Там показано, что, если существуют положительные правильные решения (8), то они монотонны.

I. Пусть $x \to +\infty$, $A_1 \to +0$. Подстановки [7]

$$A_1 = 1/X, \qquad \mathrm{d}X/\mathrm{d}t = Y$$

преобразуют дифференциальное уравнение (13) к виду

$$Y\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} - \frac{2}{X}Y^2 + 2Y - \left(\frac{3}{4} + \frac{3\alpha_0}{4\pi} + o(1)\right)X = 0\,. \tag{14}$$

По теореме Харди [6] имеем

$$Y \sim \begin{cases} \alpha_1 X^k\ \mathrm{e}^{\Pi(\sqrt[q]{X})}\,, \\ \\ \alpha_2 X^l\ (\ln X)^m\,, \end{cases} \tag{15}$$

где Π - полином, а q целое число.

a) $A_1 \to +0$, $X \to \infty$, если $\Pi({}^q\sqrt{X}) \to -\infty$. В этом случае первые три члена уравнения (14) стремятся к нулю, а четвертый член остается нескомпенсированным, чего быть не может.

b) $A_1 \to +0$, $X \to \infty$, $\Pi({}^q\sqrt{X}) \to +\infty$. Этого быть не может, так как противоречит лемме 1 (работа [6], стр.116). Следовательно, $\Pi({}^q\sqrt{X}) = const$, $k \leq 1$. Если $k < 1$, то

$$(\alpha_1^2 k - 2\alpha_1^2)X^{2k-1} + 2\alpha_1 X^k - \left(\frac{3}{4} + \frac{3\alpha_0}{4\pi} + o(1)\right) X = 0\,. \tag{16}$$

Отсюда следует, что $k = 1$. Тогда

$$\mathrm{d}X/\mathrm{d}t = \left(1 + (1/2)\sqrt{1 - 3\alpha_0/\pi}\right)\ X + o(1)\,,$$

$$\mathrm{d}X/\mathrm{d}t = \left(1 - (1/2)\sqrt{1 - 3\alpha_0/\pi}\right)\ X + o(1)\,.$$

В том случае, если $(1 - 3\alpha_0/\pi) > 0$, имеем

$$A(x) = x^{-1/2-(1/2)\sqrt{1-3\alpha_0/\pi}} + o(1) \qquad A(x) = x^{-1/2+(1/2)\sqrt{1-3\alpha_0/\pi}} + o(1)\,.$$

Если $(1 - 3\alpha_0/\pi) = 0$, то

$$A(x) = x^{-1/2} + o(1)$$

В случае $(1 - 3\alpha_0/\pi) < 0$, результат совпадает с результатом работы [5] на стр. 218.

II. $x \to +\infty$, $X \to +\infty$, $A_1 \to +0$.

Этот случай подробно описан в работе [5] на стр. 219.

Изучим теперь решения уравнения (11) при $x \to +0$. Подстановка [5]

$$x = \mathrm{e}^{-t} \qquad (x \to +0, t \to \infty) \tag{17}$$

преобразует уравнение (11) к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2 A_1}{\mathrm{d}t^2} - 2\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t} + \frac{3}{4}A_1 + \frac{3\alpha_0}{4\pi}\frac{A_1}{A_1^2 + 1} = 0\,. \tag{18}$$

III. $x \to 0$, $A_1 \to +\infty$.

Подстановка $\mathrm{d}A_1/\mathrm{d}t = p$ дает

$$\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t^2} - 2p + \frac{3}{4}A_1 + \frac{3\alpha_0}{4\pi}\frac{A_1}{A_1^2 + 1} = 0\,. \tag{19}$$

Применяя (15), получаем $p \approx \alpha A_1$, что дает

$$\alpha^2 - 2\alpha + 3/4 = 0, \quad \alpha_1 = 3/2, \quad \alpha_2 = 1/2\,.$$

$$A(x) = 1/x + o(1), \quad A(x) = 1 + o(1)\,.$$

Первый случай противоречит ограниченности $A(x)$ при $x = 0$. Мы рассматриваем правильные решения, т.е. которые существуют при $x > x_0$ и имеют непрерывную производную [6]. Второй случай дает $A(x) = 1 + o(1)$. Продолжимость этого решения нужно доказать.

IV. $x \to +0,\ A_1 \to +0,\ t \to +\infty$.

Подстановки [7] $A_1(x) = 1/X,\ \mathrm{d}X/\mathrm{d}t = Y$ дают

$$Y\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} - \frac{2}{X}Y^2 - 2Y - \left(\frac{3}{4} + \frac{3\alpha_0}{4\pi} + o(1)\right)X = 0\,. \tag{20}$$

С помощью (15) получаем

a) $1 - \dfrac{3\alpha_0}{\pi} > 0,\ A(x) = A(x) = x^{-1/2-(1/2)\sqrt{1-3\alpha_0/\pi}} + o(1),\ A \to +\infty,\ x \to +0$

b) $1 - \dfrac{3\alpha_0}{\pi} = 0,\ A(x) = x^{-1/2+o(1)},\ A \to +\infty,\ x \to +0.$

c) $1 - \dfrac{3\alpha_0}{\pi} < 0,\ A(x) = (1/\sqrt{x})\sin(\sqrt{3\alpha_0/\pi - 1}\,\ln x) + o(1),\ \overline{\lim}_{x\to 0}A(x) = +\infty$, что противоречит ограниченности $A(x)$ в нуле.

4. Приложение теории 1

В работе [4] изучается возможность восстоновления киральной симметрии в квантовой электродинамике при повышении температуры. Рассмотрение ведется с помощью уравнения Швингера-Дайсона для температурной функции Грина электрона, а также методами, применяемыми для вычисления критической температуры в теории сверхпроводимости. Применяя линеаризацию уравнения (8), автор работы [4] получает уравнение

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{3}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{3\alpha_0}{\pi x^2}\,\mathrm{th}\,\frac{x}{2}\,f = 0\,, \tag{21}$$

с начальными условиями

$$f(0) = 1, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = -\frac{\alpha_0}{2\pi}\,. \tag{22}$$

Для нахождения критической температуры необходимо решить задачу Коши для уравнения (21) с граничными условиями (22), а затем воспользоватсья соотношением

$$\left(f(x) + \frac{x}{2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=\Lambda} = 0\,. \tag{23}$$

Автор работы [4] использует a) $\mathrm{th}(x/2) \approx x/2$ – разложение функции $\mathrm{th}(x/2)$ в ряд Маклорена, b) $\mathrm{th}(x/2) = x/(x+a)$, $a = const$. Автор работы [4] не замечает, что функция

$$\mathrm{th}(x/2) = x/(x+2a) \tag{24}$$

сразу совмещает свойства a) и b), что позволяет избежать сшивки решения, которое в работе [4] проведено некорректно.

Уравнение (21) при выборе (24) принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{3}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{3\alpha_0 f}{\pi x(x+2a)} = 0\,. \tag{25}$$

Одно решение уравнения (25) имеет вид

$$F\left(1+\sqrt{1-\frac{3\alpha_0}{\pi}}, 1-\sqrt{1-\frac{3\alpha_0}{\pi}}, 3; \frac{x}{-2a}\right),$$

а линейино независимое решение можно записать в интегральной форме [6].

Далее автор работы [4] при $x \gg 1$ получает формулу (при некорректной записи формы решения)

$$\mathrm{tg}\left(\nu \ln \frac{k_{\max}}{T_c}\right) = -\mu\nu \tag{26}$$

Формула (26) является выражением того факта, что в предположениях автора работы [4] решения уравнения (21) – колеблющиеся.

Заметим, что в случае $g^2 = 3\alpha_0/(4\pi) = 1/4$, решения уравнения (21) – неколеблющиеся

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{3}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x^2}\,\mathrm{th}\,\frac{x}{2} f = 0\,. \tag{27}$$

Подстановка $f = f_1 x^{-3/2}$ преобразует уравнение (27) к виду

$$x^2\,\frac{\mathrm{d}^2 f_1}{\mathrm{d}x^2} + \left\{\mathrm{th}\,\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right\} f_1 = 0\,. \tag{28}$$

Подстановка (12) дает

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_1}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} + \left(\mathrm{th}\,\frac{\mathrm{e}^t}{2} - \frac{3}{4}\right) f_1 = 0\,. \tag{29}$$

Подстановка $f_1 = f_2 \mathrm{e}^{t/2}$ дает

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_1}{\mathrm{d}t^2} + \left(-1 + \mathrm{th}\,\frac{\mathrm{e}^t}{2}\right) f_2 = 0, \qquad \int\limits_0^\infty t\,\left|\mathrm{th}\,\frac{\mathrm{e}^t}{2} - 1\right| \mathrm{d}t < \infty\,,$$

следовательно [6],

$$f_2 = (C_1 + C_2 t) + o(1)\,,$$

$$f_1 = \mathrm{e}^{t/2}(C_1 + C_2 t) + o(1)\,,$$

$$f(x) = \frac{1}{x}(C_1 + C_2 \ln x) + o(1)\,.$$

Итак, говорить о фазовом переходе в работе [4] нельзя.

5. Приложение теории 2

В работе [8] рассматривали проблемы поляризации вакуума и динамического нарушения киральной симметрии с помощью линеаризации уравнения типа (8).

Необходимо найти асимптотическое поведение решений уравнения

$$\frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}z^2} + \left(\frac{2}{z} - \frac{z}{z-1}\right)\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z} + \frac{9}{4N_f}\left(\frac{z-1}{z^2}\right) B = 0\,.$$

(уравнение (12) из работы [8]) при $z \gg 1$ ($z \to +\infty$), N_f – число фермионов. Подстановка

$$B = B_1 \frac{\sqrt{z-1}}{z}\,\mathrm{e}^{z/2} \tag{30}$$

преобразует дифференциальное уравнение (12) из работы [8] к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}z^2} + \left(\frac{9}{4N_f z} - \frac{1}{4} + \frac{1}{z} - \frac{1}{2(z-1)} + o(1)\right) B_1 = 0\,. \tag{31}$$

Обозначим функцию, стоящую в скобках в (31) (кроме члена "-1/4"), через $\varphi(z)$, легко видеть, что при $z \to +\infty$ $\varphi \to 0$. Более того, $\int\limits_0^\infty \varphi^2(z)\mathrm{d}z < +\infty$. Применяя к (31) теорему из работы [6] (стр. 150), получаем, что

$$B_1 \sim \exp\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{z_0}^{z} \varphi(z_1)\mathrm{d}z_1\right)\,. \tag{32}$$

$$B_1 \sim \exp\left(-\frac{z}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{z_0}^{z} \varphi(z_1)\mathrm{d}z_1\right). \tag{33}$$

Если выполнено (32), то $B(z) = \sqrt{z-1}/z\ \mathrm{e}^{z+o(1)}$, $z \to +\infty$, что несравнимо с $B(z) \sim cz^{9N_f/8}$.

Если выполняется (33), то

$$B(z) \sim c/z^{1+9/(8N_f)}. \tag{34}$$

Сравнивая формулу (34) с результатом работы [8], получаем $9/(4N_f) = -1/2$, что противоречит тому, что число фермионов положительное и целое.

6. Выводы

Если $(1-3\alpha_0/\pi) \neq 0$, то динамическая масса не образуется. Резыльтаты работ [4] и [8] некорректны.

References

[1] A. I. Alekseyev, B. A. Arbuzov and A. Ya. Rodionov, T. M. Phys **42** (1980) 291.

[2] K. Johnson, M. Baker and R. Wiley, Phys. Rev. B **136** (1964) 1111.

[3] K. Johnson and M. Baker, Phys. Rev. D **8** (1973) 111.

[4] M. Sh. Pevzner, Ukr. Phys. Journ. **8** (1995) 910.

[5] A. M. Eishinskii, Fizika B (Zagreb) **7** (1998) 215.

[6] R. Bellman, *Stability Theory of Differential Equations*, Mir, Moscow (1953).

[7] A. M. Eishinskii, Vestnik MGU **4** (1969) 26;

[8] V. P. Gusynin, Mod. Phys. Lett. A **5** (1990) 133.

[9] A. M. Eishinskii, Mat. Vestnik (U) **6** (21) 3 (1969) 295.

MOGUĆNOST DINAMIČKE TVORBE MASE U KONAČNOJ KVANTNOJ ELEKTRODINAMICI

Dinamička se tvorba mase ne dešava u “konačnoj” kvantnoj elektrodinamici ako vrijedi $(1 - 3\alpha_0/\pi) \neq 0$.